Strategien in zufallsabhängigen Situationen

Franz Schoberleitner

Johannes Kepler Universität Linz
Adalbert Stifter Gymnasium Linz

Wir alle kennen es aus vielen alltäglichen Erfahrungen:
Wir müssen Entscheidungen treffen in Situationen, in denen der Zufall eine Rolle spielt.

Beispiele:

- Ich möchte ein bestimmtes Produkt kaufen. Die Situation auf dem Markt ist ziemlich komplex: Es gibt verschiedene Sonderangebote, der Preis kann sich mit der Zeit ändern, irgendwann sind die Lagerbestände erschöpft, ……
  Wann und wo soll ich „zuschlagen“ ?

- Ich möchte rasch zu meinem Ziel in der Stadt gelangen. Die Straßenbahn fährt ziemlich direkt zu diesem Ziel, aber sie kommt unregelmäßig und steckt oft im Verkehr fest. Die U-Bahn verkehrt sehr regelmäßig, aber ich muss umsteigen und habe einen längeren Fußweg ….
  Für welches Verkehrsmittel soll ich mich entscheiden ?

Zumindest dann, wenn man öfter in eine ähnliche Situation kommt, wird man beginnen, Strategien zu entwickeln, basierend auf *Erfahrung* und *Intuition*.

Besonders lehrreich sind in dieser Hinsicht viele Spiele (Gesellschaftsspiele, Familienspiele), bei denen einerseits der Zufall eine Rolle spielt (Würfeln, Karten ziehen, ….), andererseits in jeder Spielsituation verschiedene Spielzüge möglich sind.

Mathematik stellt Methoden zu einer *systematischen Analyse* von Strategien zur Verfügung. Strategien können bewertet werden durch *Wahrscheinlichkeiten* oder *Erwartungswerte*, es können somit Strategien verglichen werden, und es kann die Frage nach optimalen Strategien untersucht werden.
Es liegt auf der Hand, dass dies in vielen Bereichen der Angewandten Mathematik eine wichtige Rolle spielt, z.B. in der Finanzmathematik.

In diesem Beitrag wird das Thema in drei Beispielen für den Schulunterricht aufbereitet:

- Es werden drei einfache Spiele untersucht.
  Diese weisen eine relativ geringe Komplexität auf und sind daher einfach überblickbar.
  Und sie sind einer einfachen Simulation zugänglich: real in der Klasse bzw. mit dem Computer

- Es werden nur elementare Mittel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet.

- Die Darstellung erfolgt auf Schulniveau (mit der entsprechend notwendigen Ausführlichkeit), an einigen Stellen werden Hintergründe beleuchtet und Ausblicke angedeutet.

Einige wichtige didaktische Hinweise:

- Das *Formulieren von Strategien* (d.h.: Handlungsanweisungen für jede mögliche Spielsituation) erfordert relativ hohe Abstraktion. Es fällt den Schülern leichter, nachdem das Spiel einige Male durchgeführt worden ist.

- Bei der Suche nach „optimalen Strategien" muss vorab geklärt werden, in welcher Hinsicht die Strategie optimal sein soll („was ist die zu optimierende Größe?")

- Die gewonnenen Aussagen über Gewinnwahrscheinlichkeiten bzw. Gewinnerwartung sind *stochastische Aussagen*. Über den Ausgang des nächsten Spieldurchgangs kann nichts gesagt werden.
  (Insbesondere kann eine optimale Strategie im nächsten Spieldurchgang einer anderen unterlegen sein! Diese heilsame Erfahrung wirkt für Schüler möglicherweise irritierend und enttäuschend.)

Literaturhinweise:

Die dargestellten Beispiele kann man in verschiedenen Büchern (auf unterschiedlichen Niveaus dargestellt) finden. Auch in einige populärwissenschaftliche Veröffentlichungen haben sie Eingang gefunden, und im Internet findet man viel Material dazu (natürlich auch manches Falsche oder zumindest Problematische).

HESSE Chr., Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie, vieweg Verlag 2003
ENGEL A., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Bd 2, Klett Studienbücher 1976
PAPE B., Einfache Strategien, in: mathematik lehren Heft 54, 15 – 20
GREGER K., Zwei operationsanalytische Studien für den MU, in: MNU 1975, 460 – 467

Die im Vortrag verwendeten EXCEL-Tabellen zur Simulation der beschriebenen Beispiele können beim Autor unter der Adresse: franz.schoberleitner@jku.at angefordert werden.

Beispiel 1: Ein Würfelspiel .....

Der Spieler würfelt mit einem Spielwürfel (mit den Augenzahlen 1,2,3,4,5,6), und zwar höchstens drei mal. Nach dem ersten bzw. zweiten Wurf muss sich der Spieler entscheiden: entweder er beendet das Spiel – dann ist sein Gewinn die zuletzt gewürfelte Augenzahl -, oder er spielt weiter. Nach einem eventuellen dritten Wurf ist sein Gewinn dann die im dritten Wurf erreichte Augenzahl.

Wie soll man strategisch vorgehen, um einen möglichst großen Gewinn zu erzielen ?

Einige einfache Überlegungen ....

Würfelt man bei ersten Wurf die Zahl 6, wird man auf jeden Fall aufhören; man hat ja den größtmöglichen Gewinn erreicht. Aber sollte man nicht schon bei der Zahl 5 oder gar bei der Zahl 4 aufhören? Spielt man weiter, so hat man die Chance, eine höhere Zahl zu würfeln, aber auch das Risiko, am Ende das letzte Ergebnis nehmen zu müssen, auch wenn es schlecht ist.

Analyse:

Der Gewinn G ist eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten {1,2,3,4,5,6}. Die Verteilung dieser Zufallsvariablen hängt von der gewählten Strategie ab.
Aber was bedeutet: *maximaler Gewinn* ?

Variante 1: Die Wahrscheinlichkeit, den Gewinn 6 zu erreichen, soll maximal werden.
Variante 2: Der Erwartungswert des Gewinns soll maximal werden

Welche der beiden Varianten sinnvoll ist, hängt vom Kontext des Spiels ab.

zu Variante 1:

Hier ist die zugehörige Strategie intuitiv klar: Man achte darauf, dass jeder auftretende Sechser mit Sicherheit verwertet wird.

Strategie 1 („Strategie des Draufgängers“)

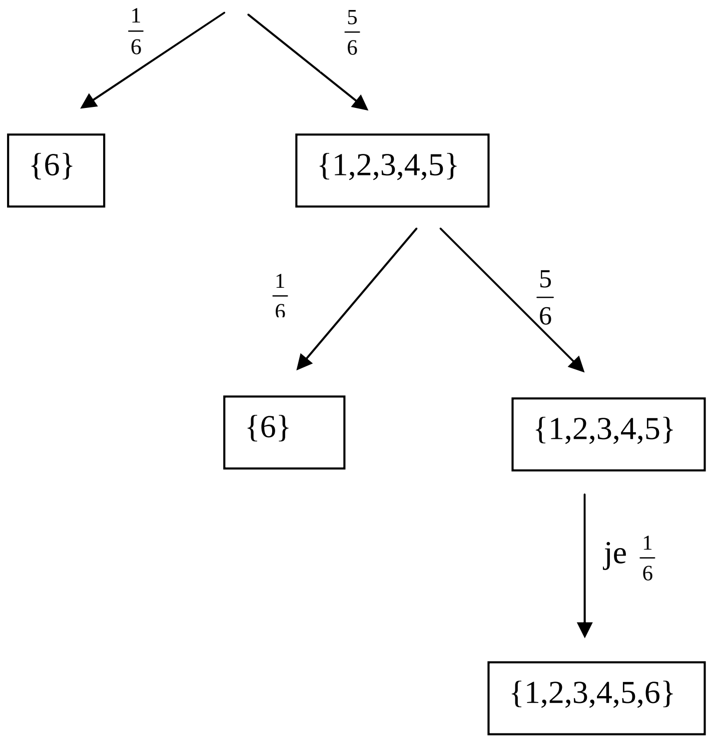
Beim ersten und zweiten Durchgang akzeptiere nur die Zahl 6, ansonsten spiele weiter. Im dritten Durchgang muss dann jede Zahl akzeptiert werden.

Man kann diese Strategie durch drei Mengen M_1, M_2, M_3 beschreiben:

$$M_1=\{6\} \qquad M_2=\{6\} \quad M_3=\{1,2,3,4,5,6\}$$

M_i enthält also die Zahlen, die im i-ten Durchgang akzeptiert werden.

Zur Ermittlung der Verteilung des Gewinns G unter der Strategie 1 ist ein Baumdiagramm hilfreich:



Man erhält folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns:

<table>
<tr><th>k</th><th>$p(G=k)$</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}116$</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.421$</td></tr>
</table>

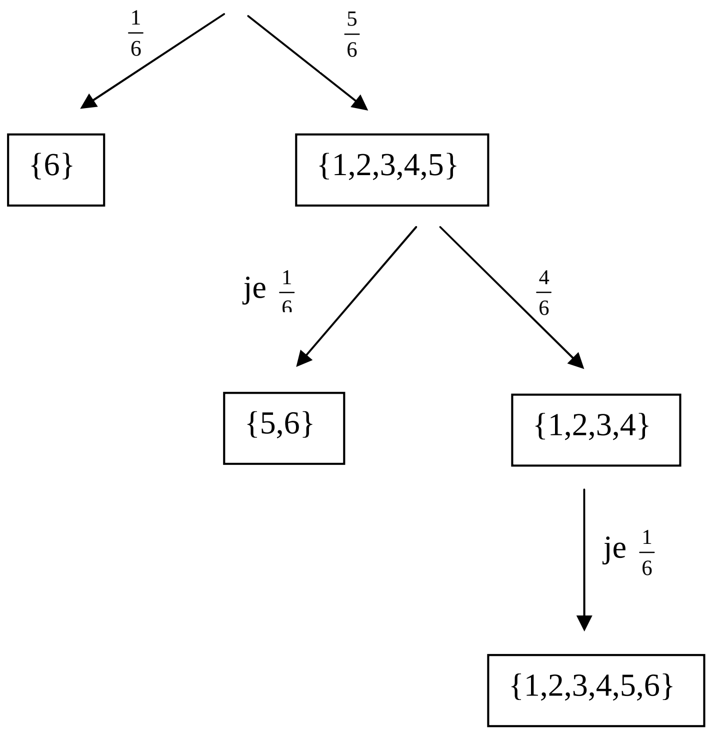
Bei der "Strategie des Draufgängers" erreicht man also in etwa 42% der Fälle den Gewinn 6; in etwa 58% der Fälle muss man sich mit dem Ergebnis des 3. Wurfes zufrieden geben. Dann aber tritt der relativ hohe Gewinn 5 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf wie der kleinstmögliche Gewinn 1.

zu Variante 2:

Hier geht es darum, den Erwartungswert E(G) (die "Gewinnerwartung") zu betrachten und nach einer Strategie zu suchen, unter der E(G) maximal ist.

Zuerst ein Beispiel einer anderen Strategie:

Strategie 2:	$M_1=\{6\}$, $M_2=\{5,6\}$, $M_3=\{1,2,3,4,5,6\}$



<table>
<tr><td>k</td><td>$p(G=k)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">$\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{20}{216}\approx 0{,}09$</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{50}{216}\approx 0{,}23$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{86}{216}\approx 0{,}40$</td></tr>
</table>

Die Gewinnerwartung ist daher

$$E(G)=\frac{20}{216}.(1+2+3+4)+\frac{50}{216}.5+\frac{86}{216}.6\approx 4{,}47$$

Dagegen ist die Gewinnerwartung bei der Strategie 1 etwas kleiner:

$$E(G)=\frac{25}{216}.(1+2+3+4+5)+\frac{91}{216}.6\approx 4{,}26$$

Systematische Überlegung zum Auffinden einer optimalen Strategie:

Wir beginnen am besten vom Ende her zu denken.
Wieso ist es klug, beim 2.Wurf nicht nur 6, sondern auch 5 und vielleicht sogar 4 zu akzeptieren ?
Ein gutes Argument ist das folgende:
Spielt man weiter, so erhält man beim nächsten Wurf eine der Zahlen 1,2,3,4,5,6 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/6, und diese muss man dann akzeptieren. Im Durchschnitt erreicht man im 3.Wurf einen Gewinn von 3,5. Da die Zahlen 4, 5 und 6 größer als 3,5 sind, ist es sinnvoll, diese Zahlen beim 2.Wurf zu akzeptieren.

Es ist also plausibel, nach folgendem Prinzip vorzugehen:

> *Akzeptiere jeweils alle jene Zahlen, die größer sind als der Erwartungswert des Gewinns für den Rest des Spiels.*

- Beim dritten Wurf muss jede Zahl akzeptiert werden. Also ist der Erwartungswert für den 3.Wurf $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$
  Wähle also gemäß obiger Regel: $M_2 = \{4,5,6\}$

- Um M_1 zu ermitteln zu können, benötigt man den Erwartungswert des Gewinns für die restlichen 2 Würfe. Welchen durchschnittlichen Gewinn erzielt man in den restlichen beiden Würfen ?
  Mit Wahrscheinlichkeit 0,5 tritt $M_2 = \{4,5,6\}$ ein. In diesem Fall beendet man das Spiel; der durchschnittliche Gewinn ist dann 5.
  Mit Wahrscheinlichkeit 0,5 tritt M_2 nicht ein. In diesem Fall spielt man weiter und hat dann einen durchschnittlichen Gewinn von 3,5 – wie bereits oben überlegt.
  Also ist der Erwartungswert des Gewinn für die restlichen beiden Spiele 0,5. 5 + 0,5. 3,5 = 4,25

  Gemäß obiger Regel hat man also zu wählen: $M_1 = \{5,6\}$

Strategie 3:

Runde 1:	Akzeptiere 5 und 6,	ansonsten spiele weiter
Runde 2:	Akzeptiere 4, 5 und 6,	ansonsten spiele weiter
Runde 3:	Jede Zahl muss akzeptiert werden	

Der Erwartungswert des Gewinns bei dieser Strategie beträgt $4\frac{2}{3} \approx 4{,}67$

Dass die hier gefundene Strategie unter allen möglichen Strategien tatsächlich die maximale Gewinnerwartung liefert, ist zwar plausibel, müsste aber noch bewiesen werden.

Formale Darstellung dieser Überlegung:

Mögliche Ausgänge des Würfelns: $M = \{1, ..., m\}$

X_n ..... Gewürfelte Zahl, wenn noch n Runden bevorstehen

k_n …. kleinste zu akzeptierende Zahl, wenn noch n Runden bevorstehen
A_n …. Menge der akzeptierten Zahlen, wenn noch n Runden bevorstehen
$A_n = \{k_n, ..., m\}$

G_n ….Gewinn in den noch verbleibenden n Runden,
wenn gemäß der (rekursiv) beschriebenen Strategie gespielt wird

$e_n := E(G_n)$

Es gilt:

(1) $$e_{n+1} = E(G_{n+1}) = \underbrace{E(G_{n+1} \mid X_n \in A_n)}_{\frac{m+k_n}{2}} . \underbrace{p(X_n \in A_n)}_{\frac{m-k_n+1}{m}} + \underbrace{E(G_{n+1} \mid X_n \notin A_n)}_{e_n} . \underbrace{p(X_n \notin A_n)}_{\frac{k_n-1}{m}}$$

$$e_{n+1} = \frac{m+k_n}{2} . \frac{m-k_n+1}{m} + e_n . \frac{k_n-1}{m}$$

(2) $$k_n = [e_n] + 1$$

Man kann leicht zeigen, dass das hier verwendete Prinzip tatsächlich in jedem Schritt die Gewinn=erwartung maximal erhöht:

Bei vorgegebenem Wert e_n betrachtet man die Funktion
$$k \rightarrow e_{n+1}$$
Diese ist eine quadratische Funktion, die ihr Maximum für
$$k = [e_n] + 1$$
annimmt.

m=	100	
n	**e_n**	**k_n**
0	0,000000	1
1	50,500000	51
2	63,000000	64
3	70,030000	71
4	74,671000	75
5	78,006540	79
6	80,535101	81
7	82,528081	83
8	84,143026	85
9	85,480142	86
10	86,608121	87
11	87,572984	88
12	88,408496	89
13	89,139476	90
14	89,784134	90
15	90,357879	91
16	90,872091	91
17	91,334882	92
18	91,754743	92
19	92,136816	93
20	92,485871	93

Beispiel 2: Das Sekretärinnen-Problem

Es bieten sich hintereinander 10 Gelegenheiten.
Diese Gelegenheiten sind mit verschiedenen Zahlen ($W_1, ..., W_{10}$) bewertet, die aber nicht bekannt sind. Eine Gelegenheit kann ergriffen werden, wenn sie sich bietet; später kann nicht auf sie zurückgegriffen werden.

Ziel ist es, die beste Gelegenheit zu wählen.

Beispiele:

- Ein Chef möchte eine neue Sekretärin einstellen. Es bewerben sich 10 Personen, die der Reihe nach vorsprechen. Unmittelbar nach dem Gespräch muss entschieden werden, ob die Bewerberin genommen wird oder nicht.

- Jemand möchte eine Aktie innerhalb der nächsten 10 Tage zu einem möglichst hohen Kurs verkaufen. Allerdings sind die Kurse dieser Aktie an den einzelnen Tagen völlig unvorhersehbar.

Sei A das Ereignis: "Der größte Wert wird ausgewählt".

Die Wahrscheinlichkeit p(A) hängt von der Auswahlstrategie ab.

Gesucht ist eine Strategie, für die p(A) möglichst groß ist. Jede andere Wahl als die des größten Wertes wird als "gleich schlecht" angesehen; es wird auch akzeptiert, dass gar keine Wahl getroffen wird.

Strategie 1: Wähle *irgendeine* Gelegenheit.

Dann gilt: $p(A) = \frac{1}{10}$
da jeder der 10 Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit der größte ist.

Strategie 2: (grobe Formulierung)

- Beobachte zuerst einige Werte und merke dir den größten (genannt *Maximum*) .
- Wähle dann den nächsten Wert, der größer ist als dieses Maximum.

Wie lang sollte die "Beobachtungsphase" sein ?

Ist sie zu kurz, so besteht die Gefahr, voreilig einen niedrigen Wert auszuwählen. Ist sie zu lang, so könnte es leicht sein, dass der beste Wert in der "Beobachtungsphase" auftritt, also nicht gewählt werden kann und verhindert, dass überhaupt eine Auswahl getroffen werden kann.

Wählen wir einmal (willkürlich) eine Beobachtungsphase der Länge 5:

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}

Das Ereignis A tritt ein, wenn einer der Werte W_6, ..., W_{10} der größte ist und gemäß unserer Strategie auch wirklich ausgewählt wird.

Sei A_k das Ereignis: "W_k ist der größte Wert und W_k wird ausgewählt." (k=6,...,10)

Es gilt: $A = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9 \cup A_{10}$

und weiter $p(A) = p(A_6) + p(A_7) + p(A_8) + p(A_9) + p(A_{10})$

da die Ereignisse A_k disjunkt sind.

$p(A_6)$ = $p(W_6$ wird ausgewählt $\wedge$ W_6 ist der größte Wert)

= $p(W_6$ wird ausgewählt | W_6 ist der größte Wert) . $p(W_6$ ist der größte Wert) = $1 \cdot \frac{1}{10}$

$p(A_7)$ = $p(W_7$ wird ausgewählt $\wedge$ W_7 ist der größte Wert)

= $p(W_7$ wird ausgewählt | W_7 ist der größte Wert) . $p(W_7$ ist der größte Wert) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10}$

allgemein:

$p(A_k)$ = $p(W_k$ wird ausgewählt $\wedge$ W_k ist der größte Wert)
= $p(W_k$ wird ausgewählt | W_k ist der größte Wert) . $p(W_k$ ist der größte Wert)

$p(W_k$ wird ausgewählt | W_k ist der größte Wert) = $\frac{5}{k-1}$

Wir wissen, dass W_k der größte Wert ist. W_k wird gemäß der Strategie genau dann ausgewählt, wenn keiner der Werte W_6, ..., W_{k-1} größer als das Maximum der Werte W_1, ..., W_5 ist, d.h.: wenn der größte der Werte W_1, ..., W_{k-1} unter den Werten W_1, ..., W_5 ist. Dies kommt in 5 von k-1 Möglichkeiten vor.

$p(W_k$ ist der größte Wert) = $\frac{1}{10}$

Da die Werte in beliebiger Anordnung sind, ist jeder Wert mit derselben Wahrscheinlichkeit der größte.

$$p(A_k) = \frac{5}{k-1} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2k-2}$$

Damit erhält man insgesamt:

$$p(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} \approx 0,373$$

Das bedeutet: Bei Anwendung dieser Strategie wählt man in etwa 37% aller Fälle tatsächlich den größten Wert aus.

Lässt sich diese Wahrscheinlichkeit, den größten Wert zu erhalten, vergrößern, indem man die Beobachtungsphase verkürzt oder verlängert ?

Um dies zu untersuchen, muss jetzt die Länge der Beobachtungsphase variabel gehalten werden. Sei r die Anzahl der Werte, die beobachtet werden.
(Wir rechnen auch gleich für eine beliebige Gesamtzahl n von Werten und spezifizieren gegebenenfalls auf n = 10.)

Analog zu oben gilt:

$$p(A) = \sum_{k=r+1}^{n} p(A_k) \qquad (A_k \text{ wie oben definiert})$$

$p(A_k)$ = p(W_k wird ausgewählt | W_k ist der größte Wert) . p(W_k ist der größte Wert)

$$= \frac{r}{k-1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$p(A) = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{r}{k-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n} \cdot \sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k} =: p_r$$

Für welches r ist p_r maximal ?

Im Falle n=10 kann (etwa mit DERIVE) eine Tabelle angefertigt werden, aus der die Antwort leicht ersichtlich ist:

#1: $f(r, n) := \frac{r}{n} \cdot \sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k}$

#2: VECTOR([r, f(r, 10)], r, 1, 10)

#3:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2828968253 \\ 2 & 0.3657936507 \\ 3 & 0.3986904761 \\ 4 & 0.3982539682 \\ 5 & 0.3728174603 \\ 6 & 0.3273809523 \\ 7 & 0.2652777777 \\ 8 & 0.1888888888 \\ 9 & 0.1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Als optimale Strategie erhalten wir also nun:

Strategie 2: (präzise Formulierung)

- Beobachte zuerst die Werte W_1, W_2, W_3 und bestimme ihr Maximum
- Wähle dann den ersten Wert, der größer ist als dieses Maximum.

Mit dieser Strategie erhalten wir in fast 40% aller Versuche den größten Wert !

Allerdings gehen wir in 30% der Versuche leer aus:
Wenn nämlich der größte Wert in der Beobachtungsphase auftritt, wird nach unserer Strategie überhaupt kein Wert ausgewählt (weil ja kein größerer mehr kommt ....)

Um dies zu verhindern, könnte man die Strategie etwas erweitern:

- Beobachte zuerst die Werte W_1, W_2, W_3 und bestimme ihr Maximum
- Wähle dann den ersten Wert, der größer ist als dieses Maximum.
- Wenn kein größerer Wert mehr auftaucht, dann wähle den letzten Wert.

Klarerweise wird durch diese Festlegung die Wahrscheinlichkeit, dass der größte Wert gewählt wird, nicht verändert.

Allgemeine Untersuchung: Für welches r wird p_r maximal ?

Wir untersuchen dazu wann gilt: $p_{r-1} < p_r$ und $p_{r+1} < p_r$

Die erste Ungleichung bedeutet:

$$(r-1).\left(\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r}+.....+\frac{1}{n-1}\right) \quad < \quad r.\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+....+\frac{1}{n-1}\right)$$

Dies ist –wie man leicht nachrechnet – äquivalent zu:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+....+\frac{1}{n-1} \quad > \quad 1$$

Analog dazu erhält man aus der zweiten Ungleichung:

$$\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+....+\frac{1}{n-1} \quad < \quad 1$$

Für jedes n gibt es genau ein r , sodass

$$\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+....+\frac{1}{n-1} \quad < \quad 1 \quad < \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+....+\frac{1}{n-1}$$

Im Falle von n =10 erhält man: r = 3

Für "große n" zeigt sich folgender interessante Sachverhalt, der mit Mitteln der Analysis bewiesen werden kann:

- Jenes r, für das p_r maximal ist, ist ungefähr gleich $\frac{n}{e} \approx 0{,}368.n$
- Das Maximum von p_r ist ungefähr gleich $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$

Damit ergibt sich folgende Faustregel:

- Beobachte zuerst etwa 37% der Werte und wähle dann den nächsten, der größer als das beobachtete Maximum ist.
- Mit dieser Strategie erhält man in etwa 37% der Versuche den größten Wert.

Bemerkung:

Hier wurde in einer bestimmten Klasse von Strategien die optimale gesucht. Es wäre aber denkbar, dass es eine Strategie anderer Art gibt mit einer größeren Erfolgswahrscheinlichkeit. Dies ist nicht so. Der Beweis dafür ist natürlich schwierig.

Beispiel 3: Vorsichtig oder kühn ?

Jemand besitzt ein Kapital von 1 €. Er möchte dieses Kapital durch eine Serie von Glücksspielen auf K =5 € erhöhen.
Bei einem solchen Glücksspiel gewinnt man mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,4. Der Teilnehmer leistet einen Einsatz (mindestens 1 €); bei Gewinn erhält er den verdoppelten Einsatz zurück, bei Verlust fällt der Einsatz an die Bank.

Wie soll der Spieler seine Einsätze wählen, um mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit sein Ziel zu erreichen ?

Es bieten sich zwei „extreme“ Strategien an:

Strategie 1: *"Kühne Strategie"*

Setze bei jedem Spiel so viel ein, dass du dem Ziel möglichst nahe kommst.
(Der Gewinn bringt so maximalen Fortschritt, der Verlust führt allerdings oft in den Ruin …)

Strategie 2*:* *"Vorsichtige Strategie"*

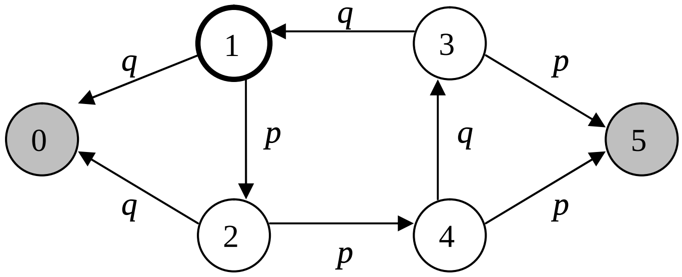
Setze bei jedem Spiel den Mindesteinsatz von 1 €.
(Zwar bringt einen der Gewinn nicht viel weiter, aber der Verlust führt i. A. nicht gleich in den Ruin …)

Beschreibung des Spielverlaufs:

Die einzelnen Kapitalstände während des Spielverlaufs können als *Zustände* (0,1,2,3,4,5) aufgefasst werden. Jeder Gewinn bzw. Verlust führt von einem Zustand in einen anderen.

Der Start erfolgt im Zustand 1.
Erreicht man den Zustand 5, so ist man am Ziel
Erreicht man den Zustand 0, so ist man ruiniert.

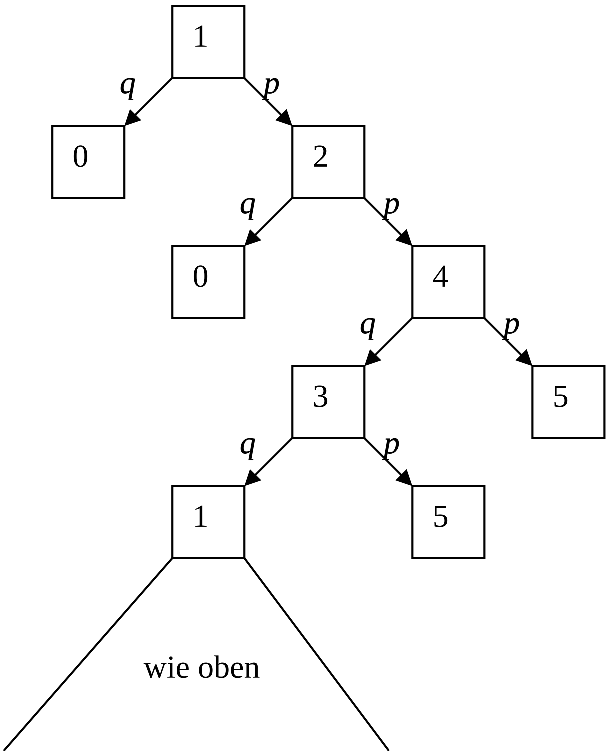
Die *kühne Strategie* kann durch folgendes *Zustandsdiagramm* dargestellt werden:



Eingetragen sind zusätzlich die *Übergangswahrscheinlichkeiten* von einem Zustand in einen anderen. $p = 0{,}4 \quad q = 1 - p = 0{,}6$

(Theoretischer Hintergrund:
Es handelt sich hier um eine *endliche homogene Markovkette* mit den *absorbierenden Zuständen* 0 und 5. Aus nahe liegenden Gründen spricht man von einer „Irrfahrt auf einem Graphen“.)

Darstellung in einem *Baumdiagramm*:



Gesucht ist die *Erfolgswahrscheinlichkeit w*, irgendwann den Zustand 5 zu erreichen.

Mit Hilfe der Pfadregeln ergibt sich:

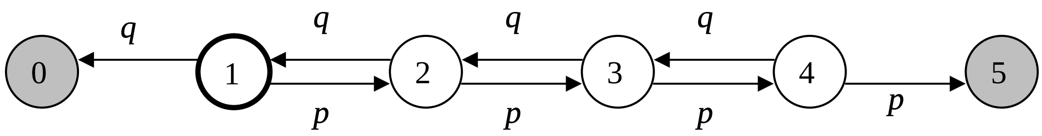
$$w = (p^3 + p^3 q) + p^2 q^2 . (p^3 + p^3 q) + (p^2 q^2)^2 . (p^3 + p^3 q) + ...$$

Die Summenformel für geometrische Reihen liefert:

$$w = (p^3 + p^3 q) . \frac{1}{1 - p^2 q^2} = \frac{p^3 (2 - p)}{1 - p^2 + 2p^3 - p^4}$$

Im Spezialfall $p = 0{,}4$ ergibt diese Formel: $w \approx 0{,}11$

Das Zustandsdiagramm der *vorsichtigen Strategie* sieht folgendermaßen aus:



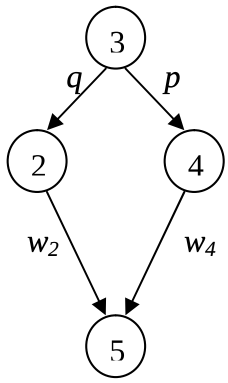
Die Darstellung in einem Baumdiagramm ist hier - wegen der drei auftretenden Zyklen - sehr unübersichtlich und hilft nicht zur Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit w.

Hier hilft eine andere Idee weiter:

Sei w_i die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand i aus irgendwann den Zustand 5 zu erreichen.
Gesucht ist letztlich $w = w_1$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
w_5 &= 1 \\
w_4 &= q.w_3 + p.w_5 \\
w_3 &= q.w_2 + p.w_4 \\
w_2 &= q.w_1 + p.w_3 \\
w_1 &= q.w_0 + p.w_2 \\
w_0 &= 0
\end{aligned}$$



Allgemein: $\boxed{w_i = q.w_{i-1} + p.w_{i+1}}$

Obiges Gleichungssystem mit 4 Unbekannten kann einfach gelöst werden.
Man setzt: $w_0 = 0$

$w_1 = w$

und berechnet daraus iterativ w_2, w_3, w_4, w_5 (in Abhängigkeit von w).
Aus $w_5 = 1$
erhält man dann den gesuchten Wert w.

Im Beispiel vorgeführt:

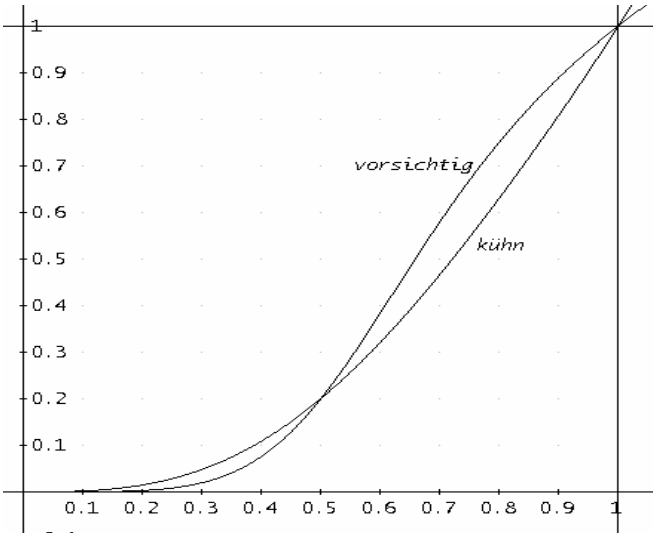
Rekursionsformel: $w_i = 0{,}6.w_{i-1} + 0{,}4.w_{i+1}$ bzw.: $w_{i+1} = 2{,}5.w_i - 1{,}5.w_{i-1}$

$$\begin{aligned}
w_0 &= 0 \\
w_1 &= w \\
w_2 &= 2{,}5.w_1 - 1{,}5.w_0 = 2{,}5.w \\
w_3 &= 2{,}5.w_2 - 1{,}5.w_1 = 4{,}75.w \\
w_4 &= 2{,}5.w_3 - 1{,}5.w_2 = 8{,}125.w \\
w_5 &= 2{,}5.w_4 - 1{,}5.w_3 = 13{,}1875.w \\
w_5 &= 1 \quad \Rightarrow \quad w \approx 0{,}076
\end{aligned}$$

Führt man diese Rechnung allgemein durch, erhält man:

$$w = \frac{p^4}{1 - 3p + 4p^2 - 2p^3 + p^4}$$

Vergleich der Erfolgswahrscheinlichkeiten für die kühne und die vorsichtige Strategie in Abhängigkeit von p:



Man erkennt:

Für $p < 0{,}5$ ist die kühne Strategie besser als die vorsichtige
Für $p > 0{,}5$ ist die vorsichtige Strategie besser als die kühne
Für $p = 0{,}5$ besitzen beide Strategie die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit.

Natürlich kann das Problem verallgemeinert werden:

Von einem Ausgangskapital K_0 soll durch eine Serie von Glücksspielen das Endkapital K erreicht werden.

Hinweis: Die Struktur des Graphen für die kühne Strategie (und damit der Aufwand für die Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit) hängt von K und K_0 ab. Der Graph für die vorsichtige Strategie ist dagegen immer von der gleichen Art.

Es gilt der folgende sehr allgemeine Satz (über beliebige Strategien in diesem Problem):

Für $p < 0{,}5$ besitzt keine Strategie eine höhere Erfolgswahrscheinlichkeit als die kühne.
Für $p > 0{,}5$ besitzt keine Strategie eine höhere Erfolgswahrscheinlichkeit als die vorsichtige.